注　意　問題**1**, **2**, **3**, **4**, **5** の解答を，**解答用紙**の所定の欄に記入しなさい。空欄（ア）～（ヒ）については，当てはまるもの（数，式など）を**解答用紙**の所定の欄に記入しなさい。

1

座標平面上において，方程式 $3x^2+2xy+3y^2=12$ で表される図形 C を考える。行列 $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ を用いると，この方程式は $(x\ \ y)A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=12$ と表せる。

$0<\theta<\pi$ である θ を用いて，$P=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ と表される行列 P が，ある実数 α，β $(\alpha<\beta)$ に対し，$AP=P\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$ を満たすとする。このとき，$\theta=\boxed{\text{（ア）}}$ であり，$\alpha=\boxed{\text{（イ）}}$，$\beta=\boxed{\text{（ウ）}}$ である。$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}s\\ t\end{pmatrix}$ とおくと，図形 C の方程式 $3x^2+2xy+3y^2=12$ は

$$\frac{s^2}{\boxed{\text{（エ）}}}+\frac{t^2}{\boxed{\text{（オ）}}}=1$$

となる。

図形 C 上の 2 点間の距離の最大値は $\boxed{\text{（カ）}}$ であり，この最大値を与える図形 C 上の 2 点の座標は $\boxed{\text{（キ）}}$ と $\boxed{\text{（ク）}}$ である。

2

定数aは$0 < a < 2$を満たすとする。座標平面上において，直線$y = ax$をℓとし，点$(1,\ 2)$をPとする。

$k < a$を満たすkに対して，直線ℓ_1を傾きがkで，点Pを通るものとする。このとき，2直線ℓとℓ_1の交点のx座標は $\boxed{\text{（ケ）}}$ である。また，2直線ℓとℓ_1およびy軸で囲まれた三角形の面積をS_1とすると，$S_1 =$ $\boxed{\text{（コ）}}$ である。このとき，S_1が最小となるkの値を定数aを用いて表すと $\boxed{\text{（サ）}}$ であり，S_1の最小値をaを用いて表すと $\boxed{\text{（シ）}}$ である。

以下，$a = \dfrac{3}{4}$とする。$k < \dfrac{3}{4}$を満たすkに対して，直線ℓ_2を傾きがkで，点Pを中心とする半径$\dfrac{1}{2}$の円と接し，かつ接点のy座標が2よりも小さいものとする。2直線ℓとℓ_2およびy軸で囲まれた三角形の面積をS_2とする。このとき，S_2が最小となるkの値は $\boxed{\text{（ス）}}$ および $\boxed{\text{（セ）}}$ であり，S_2の最小値は $\boxed{\text{（ソ）}}$ である。

3

（1） 座標平面上で，点Pが原点 $(0,\ 0)$ を出発して次の2つのルールに従って移動を繰り返し，原点から停止するまで移動した点を順に線分で結んでできるものを経路ということにする。

ルール1：$|x|$ または y が4となる点 $(x,\ y)$ に達するまで移動を繰り返し，その点で停止する。

ルール2：点 $(n,\ m)$ の次に移動できるのは，3点 $(n+1,\ m)$，$(n-1,\ m)$，$(n,\ m+1)$ のうちいずれかの点である。ただし，原点およびこれまでに移動した点には移動しない。

このとき，点 $(4,\ 2)$ で停止する経路は全部で $\boxed{（タ）}$ 通りである。

また，すべての経路は $\boxed{（チ）}$ 通りであり，そのうち，点 $(1,\ 2)$ を通る経路は全部で $\boxed{（ツ）}$ 通りである。

（2） a を実数とし，関数

$$f(x)=\left|\,|x-a|-\frac{1}{3}x-2\,\right|+\frac{1}{3}x-2$$

を考える。$f(x)$ の最小値は a であるとする。このとき，$a=\boxed{（テ）}$ であり，$f(x)$ は $x=\boxed{（ト）}$ で最小値でない極小値 $\boxed{（ナ）}$ をとる。

4

放物線 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x^2$ と直線 $y=x$ で囲まれた図形を，直線 $y=x$ のまわりに1回転してできる立体の体積 V を求めたい。

（1） $r \geqq 0$ とする。直線 $y=x$ 上にあり原点Oからの距離が r となる点のうち，x 座標が0以上の点をPとする。点Pを通り直線 $y=x$ に垂直な直線を ℓ とすると，ℓ の方程式は $y=\boxed{\text{（ニ）}}$ となる。また，点Pが放物線 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x^2$ 上にあるのは，$r=0$ と $r=\boxed{\text{（ヌ）}}$ のときである。

（2） $0 \leqq r \leqq \boxed{\text{（ヌ）}}$ とし，点Pと直線 ℓ を（1）のようにとる。直線 ℓ と放物線 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x^2$ の交点のうち，x 座標が0以上の点をQとする。点Pと点Qの距離PQの2乗を r を用いて表すと，$\mathrm{PQ}^2=\boxed{\text{（ネ）}}$ となる。求める過程を解答欄（2）に書きなさい。

（3） 求める立体の体積 V が

$$V=\pi\int_0^{\boxed{\text{（ヌ）}}}\left(\boxed{\text{（ネ）}}\right)dr$$

となることを用いて，V を求めなさい。求める過程も解答欄（3）に書きなさい。

5

z を複素数とする。自然数 n に対して z^n の実部と虚部をそれぞれ x_n と y_n として，２つの数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ を考える。つまり，$z^n = x_n + iy_n$ を満たしている。ここで，i は虚数単位である。

（１） 複素数 z が，実数 θ を用いて $z = \cos\theta + i\sin\theta$ の形で与えられたとき，任意の自然数 n に対して $x_n = \cos(n\theta)$ と $y_n = \sin(n\theta)$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明しなさい。

（２） 複素数 z が，正の実数 r と実数 θ を用いて $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ の形で与えられたとする。このとき，数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ がともに 0 に収束するための必要十分条件を，r と θ の範囲で表すと，$\boxed{\text{（ノ）}}$ となる。解答欄（２）に，$\boxed{\text{（ノ）}}$ は数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ がともに 0 に収束するための十分条件であること，および必要条件であることの証明を書きなさい。

（３） $z = \dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{10}$ のとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ はともに収束し，それぞれの和は $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \boxed{\text{（ハ）}}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \boxed{\text{（ヒ）}}$ である。